

III. FUNKCE

A) FUNKCE A JEJÍ VLASTNOSTI

1. Funkce, definiční obor, obor hodnot, graf

pr. Každému $x \in A$, $A = \{1, 2, 3\}$ přiřadíme $y \in R$, kde y je dvojnásobkem x

$$\begin{array}{l} y = 2x \\ \left. \begin{array}{l} x=1 \Rightarrow y=2 \\ x=2 \Rightarrow y=4 \\ x=3 \Rightarrow y=6 \end{array} \right\} \begin{array}{l} - \text{každému } x \in R \text{ je přiřaz. právě 1 } y \in R \\ - \text{hodnota } y \text{ je měnící v závislosti na } x \\ \Rightarrow y \text{ závisí na } x, y \text{ je funkcí } x \end{array} \end{array}$$

def. FUNKCE NA MNOŽINĚ $A \subset R$ je předpis, který každému $x \in A$ přiřazuje právě jedno reálné číslo y [kde ozn. $y = f(x)$]
- fce mív. $f, g, h, \dots$

DEFINIČNÍM OBOREM (mív. $D_f, D(g), \dots$) maximálního mív. A , ktrá dána, příp. uvažujeme největší možnou množinu

- ZÁPIS:

pr. $f: y = 2x \quad x \in \{1, 2, 3\} \quad f: x \rightarrow 2x \quad D = \{1, 2, 3\}$
 $D = \{1, 2, 3\}$

" fce f je dána předpisem $y = 2x$, kde $x \in \{1, 2, 3\}$ "

$x \dots$ NEZÁVISLE PROHĚNNÁ (ARGUMENT FUNKCE)

$y \dots$ ZÁVISLE PROHĚNNÁ (KÁVISÍ NA x)

pr. $g: y = x^2 - 3 \quad x \in \langle -2, 2 \rangle$

př. $x = -2 \Rightarrow y = 2^2 - 3 = 1$

ZÁPIS: $g(-2) = 1$

" hodnota fce g v bodě -2 je 1 "

pr. uvaž. D_h , kde $h: y = \sqrt{x}$

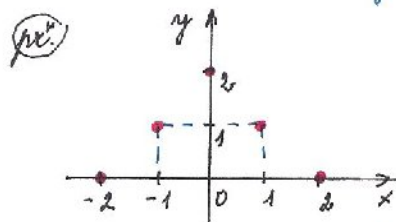
$[\sqrt{x}]$ je defin. pro $x \geq 0$

$D_h = \langle 0, +\infty \rangle$

- HODNOTA FCE f V BODĚ x_0 (FUNKČNÍ HODNOTA V BODĚ x_0) - mív. $f(x_0)$

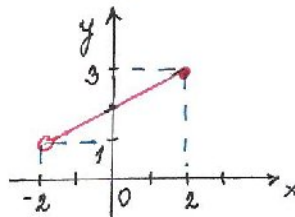
- je-li dána fce f , v mív. $x_0 \in D$ přiřazeno číslo $y_0 \Rightarrow f(x_0) = y_0$

def. GRAF FUNKCE f je množina soustav souřadnic Oxy je množina všech bodů roviny o souřadnicích $X[x, f(x)]$, kde $x \in D_f$



$D = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

$H = \{0, 1, 2\}$
(obor hodnot)



$D = \langle -2, 2 \rangle$

$H = \langle 1, 3 \rangle$

Def. OBOR HODNOT (zn. $\mathcal{H}_f, \mathcal{H}(f)$) funkce f je množina všech $y \in \mathbb{R}$, k nimž existuje alespoň jedno $x \in \mathcal{D}$ tak, že $y = f(x)$

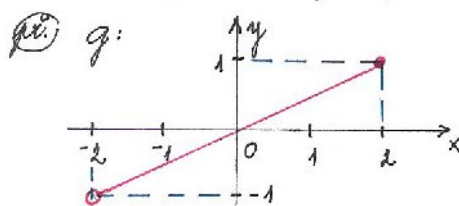
$$\mathcal{H}_f = \{y \in \mathbb{R}; \exists x \in \mathcal{D}_f: y = f(x)\} \quad [\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R}; \exists! y \in \mathbb{R}: y = f(x)\}]$$

alespoň jedno jedno a jedno

(př.) $f: y = 2x \quad x \in \{1, 2, 3\}$

x	1	2	3
y	2	4	6

$\mathcal{D} = \{1, 2, 3\}$
 $\mathcal{H} = \{2, 4, 6\}$



$$\mathcal{D} = (-2, 2)$$

$$\mathcal{H} = (-1, 1)$$

(př.) $f: y = 3 \quad x \in \{-3, -2, -1\}$

x	-3	-2	-1
y	3	3	3

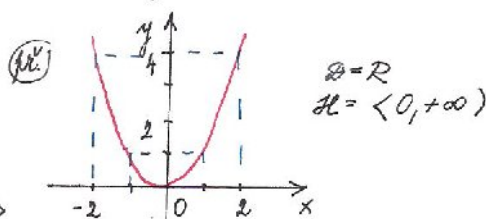
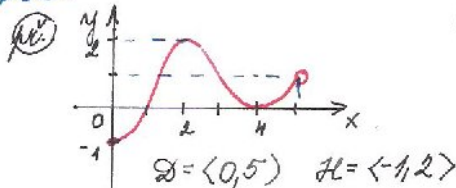
$\mathcal{D} = \{-3, -2, -1\}$
 $\mathcal{H} = \{3\}$

- FUNKCE JE JEDNOZNAČNĚ URČENA definičním oborem $\mathcal{D}$ a funkčním předpisem $y = f(x)$, který může být zadán

- tabulkou (analyticky)

(př.) $f: y = x^2 + 3 \quad \mathcal{D} = \mathbb{R}$

- grafem



- tabulkou (množina všech prvků - pouze u koneč. mn.)

(př.)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-1	-1	-1	0	1	1	1

$\mathcal{D} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
 $\mathcal{H} = \{-1, 0, 1\}$

- sterním předpisem (prakticky málo)

Příklady

① pokuste se popsat předpis fce, množin $\mathcal{D}$ a $\mathcal{H}$

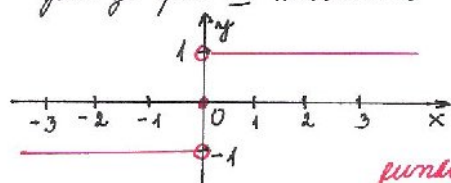
38/9
+12/45

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	0	0	1	0	1	0	1	1	1

$\mathcal{D} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
 $\mathcal{H} = \{0, 1\}$

předpis: každému přiročíslu $x \in \mathcal{D}$ je přiřazeno číslo 0, složenému číslu 1

② Ukážte si grafu funkce h , kde $\mathcal{D}(h) = \mathbb{R}$ hodnoty fce h v bodech $-3, -2, 4, -1, 0, 0, 8, 2, 3, 5$ a pokuste se popsat, jak je fce h zadána

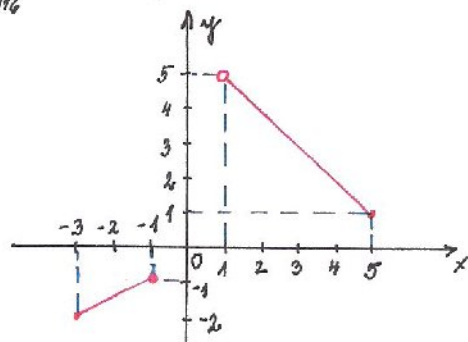


$$\left. \begin{aligned} h(-3) &= h(-2) = h(-1) = -1 \\ h(0) &= 0 \\ h(0,8) &= h(2) = h(3,5) = 1 \end{aligned} \right\} h: y = \begin{cases} -1 & \text{pro } x \in (-\infty, 0) \\ 0 & \text{pro } x = 0 \\ 1 & \text{pro } x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

signum x = (fce signum)

funkce signum (znaménková fce) $\Rightarrow$ lit. znač. číslo
kde výp. je buď součin znaménka a absol. hodnoty
 $x = \text{sign}(x) \cdot |x|$

③ je dán graf funkce ρ . Učíš



a) $D_\rho = \langle -3, -1 \rangle \cup \langle 1, 5 \rangle$

b) $\rho(-3) = -2$ $\rho(-2) = -1.5$ $\rho(5) = 1$

c) $H_\rho = \langle -2, -1 \rangle \cup \langle 1, 5 \rangle$

d) x, y -ů

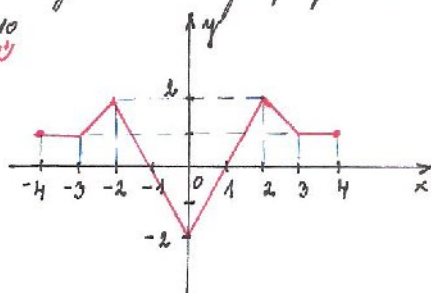
$\rho(x) = -1 \Rightarrow x = -1$

$\rho(x) = 2 \Rightarrow x = 4$

$\rho(x) = 3.5 \Rightarrow x = 4.5$

$\rho(x) < 0 \Rightarrow x \in \langle -3, -1 \rangle$

④ je dán graf funkce λ . Učíš



a) $D_\lambda = \langle -4, 4 \rangle$

$H_\lambda = \langle -2, 2 \rangle$

b) hodnoty pro λ v bodech

$-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$

$\lambda(-4) = \lambda(-3) = \lambda(3) = \lambda(4) = -1$

$\lambda(-2) = \lambda(2) = 2$

$\lambda(-1) = \lambda(1) = 0$

$\lambda(0) = 0$

c) $x \in D_\lambda$, pro která

$\lambda(x) = -2$
 $x = 0$

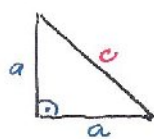
$\lambda(x) = 0$
 $x_1 = -1, x_2 = 1$

$\lambda(x) = 2$
 $x_1 = -2, x_2 = 2$

$\lambda(x) \geq 0$
 $x \in \langle -4, -1 \rangle \cup \langle 1, 4 \rangle$

⑤ Učíš funkci, která vyjadřuje závislost obvodu rovnoramenného pravoúhlého Δ

a) má délku c jako přepomý



$\sigma = 2a + c \Rightarrow \sigma$ musíme vyj. jin pomocí $c \Rightarrow$ tj. a musíme také vyj. pomocí $c \Rightarrow$ Pyth. v.

$\sigma = 2 \cdot \frac{c\sqrt{2}}{2} + c$

$\sigma = c\sqrt{2} + c$

$\sigma = c(\sqrt{2} + 1)$

$\sigma = c(1 + \sqrt{2}) \Rightarrow f: \sigma = c(1 + \sqrt{2})$

$c^2 = a^2 + a^2$

$c^2 = 2a^2$

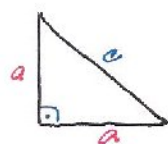
$2a^2 = c^2$

$a^2 = \frac{c^2}{2}$

$a = \sqrt{\frac{c^2}{2}} = \frac{c}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{c\sqrt{2}}{2}$

$c \in (0, +\infty) \quad [Df] = (0, +\infty)$

b) má délku a jako přepomý



$\sigma = 2a + c \Rightarrow \sigma$ musíme vyj. jin pomocí $a \Rightarrow$ tj. c musíme vyj. pomocí $a \Rightarrow$ Pyth. v.

$\sigma = 2a + a\sqrt{2}$

$\sigma = a(2 + \sqrt{2})$

$c^2 = a^2 + a^2$

$c^2 = 2a^2$

$c = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$

$\Rightarrow f: \sigma = a(2 + \sqrt{2}) \quad a \in (0, +\infty)$

⑥ rozhodni, zda předpis $y^2 = x$, $x \in \mathbb{R}$ je funkcí

- předpis je fci $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \exists! y \in \mathbb{R} : y^2 = x$

- pro $x=0 \Rightarrow y^2=0$
 $|y|=0$
 $y=0$

- pro $x=1 \Rightarrow y^2=1$
 $|y|=1$
 $y_{1,2} = \pm 1$

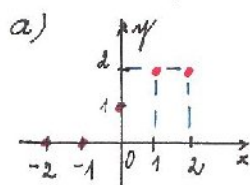
! k $x=1$ existují
 2 různé hodnoty
 $y_1=1$ a $y_2=-1$

[tedy NE PŘÁVĚ JEDNA]

$\Rightarrow$ PŘEDPIS NENÍ FUNKCÍ

(k popisu máš malou 1 příklad, kdy pořadovaná množnost myslí)

⑦ rozhodni, zda množiny bodů jsou grafem nějaké funkce

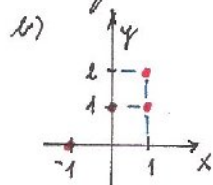


GRAF FCE

$$\left[\begin{array}{l} \forall x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\} \\ \exists! y \in \mathbb{R} \end{array} \right]$$

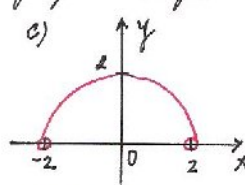
$$\mathcal{D} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

$$\mathcal{H} = \{0, 1, 2\}$$



NENÍ GRAF FCE

$$\left[\begin{array}{l} k x=1 \text{ le. 2 různ. } y \\ y_1=1 \text{ a } y_2=2 \end{array} \right]$$

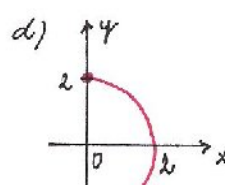


GRAF FCE

$$\left[\begin{array}{l} \forall x \in (-2, 2) \\ \exists! y \in \mathbb{R} \end{array} \right]$$

$$\mathcal{D} = (-2, 2)$$

$$\mathcal{H} = (0, 2)$$

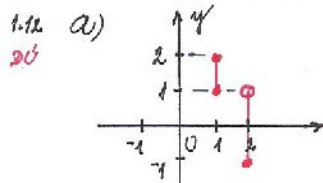


NENÍ GRAF FCE

$$\left[\begin{array}{l} \forall x \in (0, 2) \exists 2 \text{ různ. } y, \\ \text{pro } x=2 \text{ jedin. } y \end{array} \right]$$

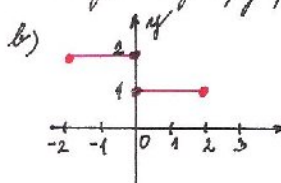
! GRAF FUNKCE je charakteristický tím, že každá přímka $\parallel$ s osou y protne graf v nejvýše jednom bodě („2 body NESMÍ LEŽET NAD SEBOU“)

⑧ rozhodni, které z množin jsou grafy funkcí

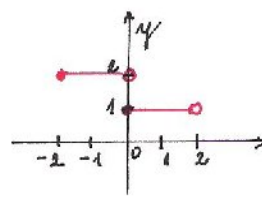


NENÍ

$$\left[\begin{array}{l} k x=1 \text{ le. } \infty \text{ mnoho } y \in \mathbb{R} \\ k x=2 \text{ le. } \infty \text{ mnoho } y \in \mathbb{R} \end{array} \right]$$



$$\left[\begin{array}{l} \text{NENÍ} \\ k x=0 \text{ le. 2 různ. } y \\ y_1=1, y_2=2 \end{array} \right]$$



JE

$$\mathcal{D} = (-2, 2)$$

$$\mathcal{H} = \{1, 2\}$$

⑨ je dána funkce $k: y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$, kde $\mathcal{D}(k)$ je mn. $x \in \mathbb{R}$, pro která má výraz smysl.

a) učiš $\mathcal{D}$ (i pomocí intervalů)

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 3x + 2 \neq 0 \quad \text{jinak by byl zlomek } \neq 0 \\ (x-1)(x-2) \neq 0 \\ x-1 \neq 0 \quad x-2 \neq 0 \\ x \neq 1 \quad x \neq 2 \\ \frac{0}{1} \quad \frac{0}{2} \end{array} \right]$$

$$\mathcal{D} = (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$$

$$\mathcal{D} = \mathbb{R} - \{1, 2\}$$

PRI URČOVÁNÍ DEFINIČNÍHO OBOU (kalkm)

1. jmenovatel zlomku různý od nuly ($\neq 0$)

2. výraz pod druhou odmocninou nezáporný (≥ 0)

PRO URČOVÁNÍ $\mathcal{D}$ NUTNO UHĚT ŘEŠIT RŮZNÉ TYPY ROVNIC A NEROVNIC (TJAK OPRAVOVÁNÍ - KALKULUS, PŘÍKLADY + 1. ROČNÍK)

b) Dokážeme, zda číslo 5 patří do oboru hodnot

$$2.5 \in \mathcal{H} \quad (y \in \mathcal{H})$$

$$5 \in \mathcal{H} \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} : 5 = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$$

(y) *alespoň jedno*

$$5(x^2 - 3x + 2) = 1$$

$$5x^2 - 15x + 9 = 0$$

$$(a=5, b=-15, c=9)$$

*nebo má k. r. e.
⇒ anulovat*

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{(-15)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 9}}{2 \cdot 5} = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 180}}{10} = \frac{15 \pm \sqrt{45}}{10} = \frac{15 \pm \sqrt{5 \cdot 9}}{10}$$

$$x_{1,2} = \frac{15 \pm 3\sqrt{5}}{10} = \left\langle \frac{15 + 3\sqrt{5}}{10} \in \mathbb{R} \quad \frac{15 - 3\sqrt{5}}{10} \in \mathbb{R} \right\rangle \quad [\mathcal{H} = \mathbb{R} - \{4, 2\}]$$

Každý: $5 \in \mathcal{H}$, tj. dokonce dvě $x \in \mathbb{R}$, pro nich $y = 5$

10) Určete definiční obor

a) $f: y = \frac{4x-3}{\sqrt{x^2-3x}}$

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 3x \geq 0 \wedge x^2 - 3x \neq 0 \\ x^2 - 3x > 0 \\ x(x-3) > 0 \\ [\text{mul. b. } x_0=0, x_0=3] \\ \text{nebo} \\ \text{viz. 4. 4(4-3) > 0} \end{array} \right]$$

$$\mathcal{D} = (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$$

b) $g: y = \sqrt{x^2 + 5x + 6}$

$$\left[\begin{array}{l} x^2 + 5x + 6 \geq 0 \\ (x+3)(x+2) \geq 0 \\ [\text{mul. b. } -3, -2] \end{array} \right]$$

$$\mathcal{D} = (-\infty, -3] \cup [-2, +\infty)$$

c) $h: y = \sqrt{|x-2|-3}$

$$\left[\begin{array}{l} |x-2|-3 \geq 0 \\ |x-2| \geq 3 \\ [\text{mul. b. } 2] \end{array} \right]$$

$$\mathcal{D} = (-\infty, -1] \cup [5, +\infty)$$

d) $k: y = \frac{5x}{\sqrt{|2x-3|-2}}$

$$|2x-3|-2 \geq 0 \wedge |2x-3|-2 \neq 0$$

$$|2x-3|-2 > 0$$

$$|2x-3| > 2 \quad | : 2 \quad \text{viz. 1}$$

$$|x - \frac{3}{2}| > 1$$

$$[x_0 = \frac{3}{2}]$$

$$\mathcal{D} = (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{5}{2}, +\infty)$$

11) je dána funkce $u: y = \frac{2}{x^2-1}$

1.14 a) obor

2.1 b) obor $u(0)$, $u(3)$, $u(-7)$, $u(15)$

3.1 c) obor x čísel -4 , 0 , $1,8$ patří do oboru hodnot

a) $u: y = \frac{2}{x^2-1}$

$$\left[\begin{array}{l} x^2-1 \neq 0 \\ x^2 \neq 1 \text{ nebo } (x-1)(x+1) \neq 0 \\ |x| \neq 1 \\ x_{1,2} \neq \pm 1 \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} x-1 \neq 0 \\ x+1 \neq 0 \\ x \neq 1 \\ x \neq -1 \end{array} \right]$$

$D = \mathbb{R} - \{1, -1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$

b) $u: y = \frac{2}{x^2-1}$

? $u(0): y = \frac{2}{0^2-1}$

$f(x)$
 $x=0 \quad y = -2$

$u(0) = -2$

? $u(3): y = \frac{2}{9^2-1}$

$y = \frac{2}{8 \cdot 4}$

$u(3) = \frac{1}{16} = 0,0625$

? $u(15): y = \frac{2}{15^2-1}$

$y = \frac{2}{14 \cdot 16}$

$y = \frac{2}{112} = \frac{1}{56}$

$y = \frac{1}{56} = 0,017857$

$u(15) = \frac{1}{56} = 0,017857$

? $u(-7): y = \frac{2}{(-7)^2-1} = \frac{2}{49-1} = \frac{2}{48} = \frac{1}{24} = 0,041666$

$u(-7) = \frac{1}{24} = 0,041666$

c) ? $-4 \in \mathcal{H} \Leftrightarrow \exists x \in D: -4 = \frac{2}{x^2-1}$
 $y \in \mathcal{H}$

$-4(x^2-1) = 2$

$-4x^2+4 = 2$

$-4x^2+2 = 0 \quad |: (-2)$

$2x^2-1 = 0$

$2x^2 = 1$

$x^2 = \frac{1}{2}$

$|x| = \sqrt{\frac{1}{2}}$

$|x| = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$x_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \in D$

závěr: $-4 \in \mathcal{H}$

? $1,8 \in \mathcal{H}: 1,8 = \frac{2}{x^2-1}$

$1,8 = \frac{18}{10} = \frac{9}{5}$

$\frac{9}{5} = \frac{2}{x^2-1}$

$9(x^2-1) = 10$

$9x^2-9 = 10$

$9x^2 = 19$

$x^2 = \frac{19}{9}$

$|x| = \frac{\sqrt{19}}{3}$

$x_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{19}}{3} \in D$

závěr: $1,8 \in \mathcal{H}$

? $0 \in \mathcal{H} \Leftrightarrow \exists x \in D: 0 = \frac{2}{x^2-1}$

$0(x^2-1) = 2$

$0x = 2$

neplatí.

žádné $x \in D$ není.

závěr: $0 \notin \mathcal{H}$